

24.09.24
COURS 3.1.
AL. MT

Thm 5 (rappel / reformulation)

Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Alors

le système (homogène) $A\vec{x} = \vec{0}$

possède une seule solution (la sol. $\vec{x} = \vec{0}$)

si et seulement si la forme échelonnée (réd) de A possède exactement n pivots
(un pivot par variable, ^{càd} pas de variable libre)

Sinon, le système possède une infinité de solutions.

Important (injectivité)

exemples :

$$A = \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} \end{pmatrix}$$

↑

$x_2 = t$ variable libre

$$x_1 = -t$$

$$x_2 = t$$

$$x_3 = 0$$

$$A\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} -t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

$$S = \left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

un vecteur directeur

↖ droite de $\mathbb{R}^3$ passant
par $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10^{10}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3 pivots : 1 pivot par variable
pas de variable libre

Thm 5 $\Rightarrow$ la seule solution de $B\vec{x} = \vec{0}$
est $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 5}$$

3 var. libres

$$\begin{array}{ccc} x_2, x_3, x_5 \\ \parallel & \parallel & \parallel \\ s & t & u \end{array}$$

2 liée

$$x_1, x_4$$

on réécrit $x_1 = -2s - 3t$

$$x_4 = -7u$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -2s - 3t \\ s \\ t \\ -7u \\ u \end{pmatrix} \mid s, t, u \in \mathbb{R} \right\}$$

$\vec{x} \in S \iff$ il existe $\lambda, t, u \in \mathbb{R}$ t.q.

$$\vec{x} \stackrel{\text{(ev)}}{=} \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

($\in \mathbb{R}^5$)

$\uparrow$ sous espace de dim 3 dans $\mathbb{R}^5$

Systèmes inhomogènes

Thm 6: Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ et $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$
tel que $\vec{b} \neq \vec{0}$ (càd $\exists$ un $i \in \{1, \dots, m\}$
t.q. $b_i \neq 0$).

Supposons que le syst.

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

possède une "solution particulière" $p \in \mathbb{R}^n$
(cela veut dire que $\vec{b}$ est comb. lin. des colonnes de A d'après un résultat précédent)

Alors l'ens. des solutions

$$S = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{b} \}$$

est égal à

$$T = \left\{ \vec{p} + \vec{h} \mid \vec{h} \text{ est solution du syst. homogène } A\vec{x} = \vec{0} \right\}$$

Morale: Pour connaître toutes les sol. de $A\vec{x} = \vec{b}$ il suffit de connaître

- 1 solution particulière de $A\vec{x} = \vec{b}$ (s'il en existe)
- toutes les solutions du système homogène $A\vec{x} = \vec{0}$

dém.: Soit $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$ une sol. de $A\vec{x} = \vec{b}$

On doit démontrer qe les ens. plus haut (S et T) sont égaux.

- $S \subset T$: Soit $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ t.q. $A\vec{x} = \vec{b}$

écrivons $\vec{x} = \vec{p} + \underbrace{(\vec{x} - \vec{p})}_{\vec{h}}$ (astuce!)

Posons $\vec{h} = \vec{x} - \vec{p}$ et calculons

$$A\vec{h} = A(\vec{x} - \vec{p}) \stackrel{TL}{=} \underbrace{A\vec{x}}_{\vec{b}} - \underbrace{A\vec{p}}_{\vec{b}} = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}$$

Donc on peut écrire $\vec{x} = \vec{p} + \vec{h}$
avec $\vec{h}$ sol. de $A\vec{x} = 0$

càd $x \in T$.

Montrons que $T \subset S$:

Soit $\vec{x} \in T$, càd $\exists \vec{h}$ t.q

$$\vec{x} = \vec{p} + \vec{h} \quad \text{avec} \quad A\vec{h} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} \text{alors } A\vec{x} &= A(\vec{p} + \vec{h}) \stackrel{TL}{=} \underbrace{A\vec{p}}_{\vec{b}} + \underbrace{A\vec{h}}_{\vec{0}} \\ &= \vec{b} \end{aligned}$$

donc $\vec{x} \in S$. cqfd.

ex: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

sol. particulière $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ✓

syst. homogène $A\vec{x} = \vec{0}$

$\leadsto \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$x_1 = -s - t$

$x_2 = s$

$x_3 = t$

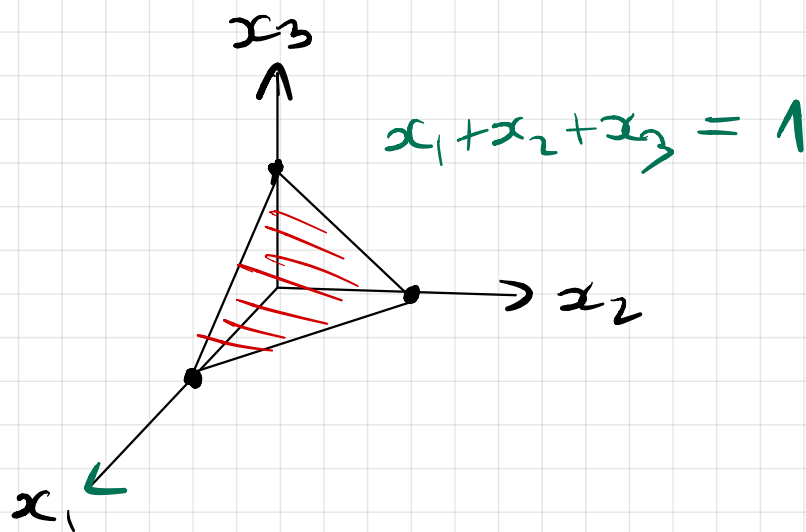
$S_{\text{homogène}} = \left\{ \begin{pmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$

$S = \left\{ \vec{p} + \vec{h} \mid \vec{h} \in S_{\text{homogène}} \right\}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$

$x_1 + x_2 + x_3 = 1$ le plan passant par et de vect. dir.



Méthode pour résoudre $A\vec{x} = \vec{b}$ (Important)

- 0) Traduire le syst. en termes matriciels
- 1) Trouver la forme échelonnée réduite de $(A | b)$ en faisant op. élém. sur les lignes
- 2) Estimer si $A\vec{x} = \vec{b}$ a une solution ou non
(pas de pivot dans la dernière colonne, ou pivot)
- 3) Écrire la sol. générale $\vec{x}$ comme vecteur dépendant des éventuelles variables libres
- 4) Écrire / décomposer $\vec{x}$ comme combinaison linéaire de vecteurs fixes en utilisant les variables libres comme coefficients.

ex:
$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 1 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_A \qquad \underbrace{\hspace{2em}}_{\vec{b}}$

1)
2)
3)

système compatible : pas de pivot en dernière colonne ✓

3 var. liées

4 || libres : x_2, x_4, x_6, x_7

1) $x_1 = 3 - 2x_2$

2) $x_3 = 1 + x_4 - x_7$

3) $x_5 = 3 - x_6 - x_7$

rebaptême :

$x_2 = a$

$x_4 = b$

$x_6 = c$

$x_7 = d$

paramètres

$\vec{x}$ vérifie $A\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3-2a \\ a \\ 1+b-d \\ b \\ 3-c-d \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$$ev = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

↑
truc de dim 4 dans $\mathbb{R}^7$

§ 1.7 Indépendance linéaire (Lay, p. 61)

But: Comprendre quand un syst. homogène

$A\vec{x} = \vec{0}$ n'admet que la solution $\vec{x} = \vec{0}$.

Rappel: si $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p$ sont les colonnes de A

alors

$(A \in M_{m \times p}(\mathbb{R}))$

$$A\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \dots + x_p \vec{a}_p = \vec{0}$$

$\in \mathbb{R}^m$

Définition: Soient $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p \in \mathbb{R}^m$ des vecteurs ($p \geq 1$)
 On dit que la famille $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ est linéairement indépendante (ou famille libre)

si l'équation vectorielle

$$x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_p \vec{v}_p = \vec{0} \quad \left(\begin{array}{l} \text{égalité} \\ \text{dans} \\ \mathbb{R}^m \end{array} \right)$$

n'a que la solution nulle $\vec{0} \in \mathbb{R}^p$



On dira que $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ est lin. dépendante sinon. (ou famille liée)

càd s'il existe des coefficients

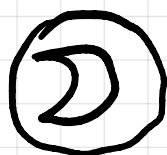
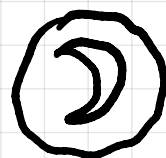
$$\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$$

non tous nuls

(au moins un des λ_i est non-nul)

t.q

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_p \vec{v}_p = \vec{0}$$



s'appelle une relation de dépendance linéaire entre les $\vec{v}_i$

ex:

$$1) \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{lin indép (dans } \mathbb{R}^2)$$

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{aussi,}$$

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{37} \\ -\frac{1}{37} \end{pmatrix} \quad \text{lin. dépendants.}$$

$$2) \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est lin. dép. dans $\mathbb{R}^2$

$$\vec{v}_3 = 2\vec{v}_1 - 3\vec{v}_2$$

$$\text{ou encore } 2\vec{v}_1 - 3\vec{v}_2 - \vec{v}_3 = \vec{0}$$

rel.
de
dép.
lin.

$$3) \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

lin. ind. (dans $\mathbb{R}^3$)

+ génér.

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

sont linéairement indépendants (dans $\mathbb{R}^n$)

$$\left(\text{ou } e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ } i\text{-ième composante} \right)$$

Rem. Soit $A = (\vec{a}_1 \mid \dots \mid \vec{a}_p) \in M_{m \times p}(\mathbb{R})$

$\vec{a}_i =$ la i -ième colonne de $A \in \mathbb{R}^m$

Alors, les colonnes de A sont linéairement indépendantes ($\in \mathbb{R}^m$)

• si et seulement si

le système homogène $A\vec{x} = \vec{0}$

ne possède que la solution nulle $\vec{x} = \vec{0}$ ($\in \mathbb{R}^p$)

• si et seul. si la forme échelonnée réduite de A possède p pivots (un par colonne)

donc les colonnes de A sont dépendantes

$\Leftrightarrow$ le système $A\vec{x} = \vec{0}$ possède une solution non nulle

$\Leftrightarrow$ la forme éch. réduite de A possède au moins une variable libre

$\Leftrightarrow$ la forme éch. réduite de A possède moins de pivots que de variables colonnes

ex:

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2 pivot
pour 2 variables

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont indep.

$$2) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -28 \\ 0 & 0 & 1 & 10^{300} \end{pmatrix}_{3 \times 4}$$

$\underbrace{\quad}_{\vec{a}_1} \quad \underbrace{\quad}_{\vec{a}_2} \quad \underbrace{\quad}_{\vec{a}_3} \quad \underbrace{\quad}_{\vec{a}_4}$

4 vect.
dans $\mathbb{R}^3$

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & 1 & 1 & 7 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 & -28 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 10^{300} \end{pmatrix}$$

3 pivots $\nwarrow$ 1 variable libre

la famille $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4)$ est
lin. dépendante.

$$3) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\quad}_{\vec{a}_1} \quad \underbrace{\quad}_{\vec{a}_2} \quad \underbrace{\quad}_{\vec{a}_3}$

(exercice suppl.)

lin. indep

Rem: si $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^n$

Alors $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ est dépendante

$$\Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ tq } \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 \vec{v}_1 = -\lambda_2 \vec{v}_2$$

} si $\lambda_1 \neq 0$

$$\vec{v}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \vec{v}_2$$

(càd $\vec{v}_1$ est multiple de $\vec{v}_2$)

$$\Leftrightarrow \vec{v}_1 \text{ et } \vec{v}_2 \text{ sont colinéaires}$$

Morale: Deux vecteurs sont indépendants
s'ils ne sont pas nuls
et s'ils ne sont pas alignés

Thm 7 (Lay, p. 63)

Soit $F = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ une famille de p vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ avec $p \geq 2$ (au moins 2 vecteurs).

Alors F est lin. dépendante si et seulement si il existe au moins un vecteur de F

qui est combinaison linéaire des autres vecteurs.

ex: $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \underbrace{\frac{\vec{v}_1}{1000} - \pi \vec{v}_2 + 7^3 \vec{v}_3}_{\text{C.L. de } \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3})$

famille dépendante.

Thm 8 (Lay p. 64) (Important)

Si $F = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ vecteurs dans $\mathbb{R}^n$

et si $p > n$ (plus de vecteurs que de composantes)

alors F est linéairement dépendante.

dém. (jeudi)